5　回転運動

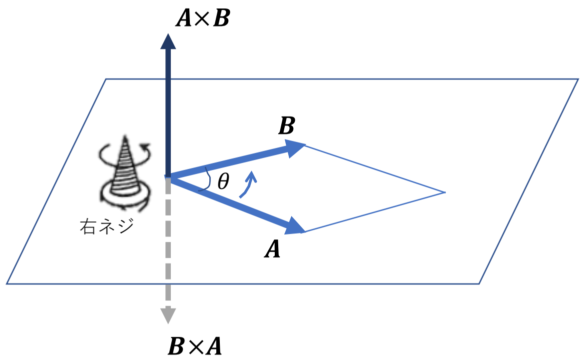
回転運動を扱うときは、Newtonの運動方程式まで立戻らずに「**回転の運動方程式**」から出発するのが便利である。この章では回転力、あるいは回転の状態を変化せる原因となる物理量「**力のモーメント**」と、回転の度合い（状態）を表す物理量「**角運動量**」を導入し、それらの関係として回転の運動方程式を導く。力のモーメントも、角運動量もベクトル量であるので、その向きと大きさがどうなっているのか、それらの幾何学的な関係はどうなっているのか、常に留意する必要がある。実際、**座標成分での計算を直接しなくとも、幾何学的な関係から回転運動の様子が議論できる**ことも多い。

5.1　ベクトル積（外積）（数学的準備）

力のモーメントも、角運動量もベクトル積を使って定義される。そこで、これから頻繁に出てくる「ベクトル積 (vector product)」について復習しておこう[1]。特に幾何学的な面に注意を払うことにする。

任意の二つのベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ があったとき、それらのベクトル積(外積）は、

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} \qquad (5\text{-}1\text{-}1)$$



のように書き、その演算結果は右図に示したような**ベクトル**になる。すなわち、

向き：$\mathbf{A}$と$\mathbf{B}$が作る平面に垂直で、右ネジを$\mathbf{A}$から$\mathbf{B}$の方に回した時にネジが進む方向。
大きさ：$\mathbf{A}$と$\mathbf{B}$が作る平行四辺形の面積。

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta \qquad (5\text{-}1\text{-}2)$$

ただし、θ は$\mathbf{A}$と$\mathbf{B}$がなす角度である。

上の定義から、同じベクトルどうしのベクトル積はゼロになることがわかる。（平行四辺形の面積はゼロになってしまうから。あるいは、同じことだが、$\theta=0$ なので $\sin\theta=0$ になるから (5-1-2)式より、その大きさはゼロ。）

また、式(5-1-1)で積の順序を変えるとマイナスの符号がつく（図のように、大きさは同じだが逆向きのベクトルになる。）理由は、右ネジを$\mathbf{B}$から$\mathbf{A}$の方に回した時にネジが進む方向は、$\mathbf{A}$から$\mathbf{B}$ に回した時と逆だからである。

これらを式で書いておくと、

$$\mathbf{A}\times\mathbf{A} = 0 \qquad (5\text{-}1\text{-}3)$$

$$\mathbf{B}\times\mathbf{A} = -\mathbf{A}\times\mathbf{B} \qquad (5\text{-}1\text{-}4)$$

以下に、「ベクトル積の分配則」と「ベクトル積の微分」の式を書いておく。

分配則　$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\mathbf{C} \qquad (5\text{-}1\text{-}5)$$

微分　$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \dot{\mathbf{A}}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\dot{\mathbf{B}} \qquad (5\text{-}1\text{-}6)$$

ベクトル積の微分(5-1-6)式は、積の微分の公式と同じ形をしている。

---

[1] ベクトル積は外積(cross product, outer product)とも言う。

例題として、３次元直交座標の単位ベクトルどうしのベクトル積を計算してみる。x, y, z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ とすると、全て長さが１でお互い直交しているから、

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z, \qquad \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x, \qquad \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \qquad \text{(5-1-7)}$$

のようにサイクリックになる[2]。３次元極座標の単位ベクトルの場合（4-3節の図を見よ）も同じようにして、

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\varphi, \qquad \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_r, \qquad \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta \qquad \text{(5-1-8)}$$

となる。

ここで、直交座標での成分表示を書いておく[3]。

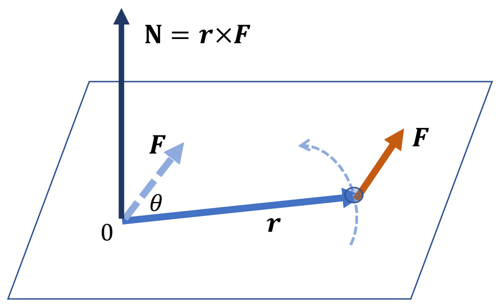
$$\begin{aligned}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_x &= A_yB_z - A_zB_y \\ (\mathbf{A}\times\mathbf{B})_y &= A_zB_x - A_xB_z \\ (\mathbf{A}\times\mathbf{B})_z &= A_xB_y - A_yB_x\end{aligned} \qquad \text{(5-1-9)}$$

（証明）$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = (A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y + A_z\mathbf{e}_z)\times(B_x\mathbf{e}_x + B_y\mathbf{e}_y + B_z\mathbf{e}_z)$ を展開して成分ごとにまとめると求まる。

5.2　力のモーメント

力のモーメント(moment of force)[4]は、回転の状態を変化せる原因となる物理量（**ベクトル量**）であり、回転力、という言い方もできる。

力のモーメントを $\mathbf{N}$ という記号で書くことにすれば、その定義は、



$$\mathbf{N} \equiv \mathbf{r}\times\mathbf{F} \qquad \text{(5-2-1)}$$

のように位置ベクトル $\mathbf{r}$ と 力ベクトル $\mathbf{F}$ のベクトル積で表される。

$\mathbf{N}$ の向きと大きさは、右上図より、

向き　：<u>$\mathbf{r}$と$\mathbf{F}$が作る平面に垂直で、右ネジを$\mathbf{r}$から$\mathbf{F}$の方に回した時にネジが進む方向</u>。

大きさ：<u>$\mathbf{r}$と$\mathbf{F}$が作る平行四辺形の面積</u>。　$|\mathbf{N}| = |\mathbf{r}||\mathbf{F}|\sin\theta$　　(5-2-2)

となる。（$\mathbf{F}$ を図のように原点の位置まで平行移動してから計算するとわかりやすい。）

式(5-2-2)より、力のモーメントが最大になるのは、「腕（回転軸を原点として力の作用点まで引いたベクトル）」$\mathbf{r}$ と「力」$\mathbf{F}$　が垂直 $(\theta = 90\ \mathrm{deg})$の時であることがわかる。実際、軸の周りに物体を回転させる状況を考えれば、軸と物体を結ぶ腕に直角に力を加えるのが一番効率的であることは経験的に良く知られている事である。

さて、例題を解いて上の定義が妥当かどうか調べるが、その前に$\mathbf{N}$の向きにはどのような意味があるのかを見ておく。上の図の場合だと、力のモーメントは、物体を反時計回りに回転さ

---

2 自分で図を書いて確かめよ（極座標の場合についても確かめよ）。

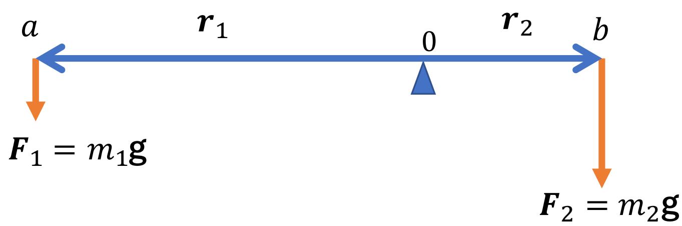
3 (5-1-9)式において、x成分の右辺では(y, z)、y成分では(z, x), z成分では(x,y) となっている。すなわち、左辺から右辺にかけて x->y->z、y->z->x、z->x->y のように<u>**x,y,zが循環するように（サイクリックに）添え字が付いている**</u>。ただ、右辺では、添え字を入れ替えた項が引き算として加わっている事を覚えておく必要がある。

4 「トルク」と呼ばれることもある。「トルク」は機械（工学）関係で、特に、軸の周りの回転の際に使われる。しかし、それ以外でも使われる場合がよくある。物理関係では「力のモーメント」と呼ぶことが多い。

せようとすることがわかる。しかし、図で$\mathbf{F}$を反転させ、$-\mathbf{F}$ とすると物体は時計回りに回転しようとするだろう。この時、$\mathbf{N}$ はどう変わるであろうか。この場合は右ネジを$\mathbf{r}$から$\mathbf{F}$の方に回すと平面の下方に向かうので$\mathbf{N}$ の向きは反転し平面の下方を向くことになる($-\mathbf{N}$ になる)。こうして、$\mathbf{N}$の向きは、$\mathbf{N}$に垂直な平面上で物体を反時計回り($\mathbf{N}$が上向きの時）、時計回り($\mathbf{N}$が下向きの時）のどちらの方向へ回転させようとしているか、という情報を持っていることになる。$\mathbf{N}$の向きが反転すれば、回転させようとする方向は逆になる。

（例題）以下の「天秤（竿）ばかり」の釣り合いの条件を「力のモーメント」を使って求めよ。

支点0から$r_1 = |\mathbf{r}_1|$の点aに質量 m_1 の物体を、$r_2 = |\mathbf{r}_2|$の点bに質量 m_2 の物体をつるしたとする。この時、我々は、同じ重さの物体では釣り合わず、



$$(m_1 g)r_1 = (m_2 g)r_2 \qquad \text{(5-2-3)}$$

になるようにしなければならぬことを経験的に知っている。すなわち、力が同じだけではダメで、腕の長さをかけた量が左右で同じになることが必要である。この量は、まさしく力のモーメントの大きさを表している。

これを、式(5-2-1)の力のモーメントの定義に従って、あらためて見ていくことにする。支点0のまわりの「作用点 a 」での力のモーメントを $\mathbf{N}_1$ とし、「作用点 b 」での力のモーメントを $\mathbf{N}_2$ と書くことにすると[5]、

$$\mathbf{N}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 = \mathbf{r}_1 \times (m_1\mathbf{g})、\quad \mathbf{N}_2 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{r}_1 \times (m_2\mathbf{g}) \qquad \text{(5-2-4)}$$

となる。ここで $\mathbf{g}$ は重力加速度ベクトル（大きさは $g = |\mathbf{g}|$）である。それぞれのモーメントの向きと大きさを求めると、

$\mathbf{N}_1$ の向き：紙面に垂直で手前に飛び出してくる方向である（$\odot$ と書くことにする）。

$\mathbf{N}_1$ の大きさ：$|\mathbf{N}_1| = |\mathbf{r}_1||m_1\mathbf{g}|\sin(\pi/2) = (m_1 g)r_1$ (5-2-5)

$\mathbf{N}_2$ の向き：紙面に垂直で奥に進む方向である（$\otimes$ と書くことにする）。

$\mathbf{N}_2$ の大きさ：$|\mathbf{N}_2| = |\mathbf{r}_2||m_2\mathbf{g}|\sin(\pi/2) = (m_2 g)r_2$ (5-2-6)

となる。

$\mathbf{N}_1$ は竿を反時計回りに回転させようとするのに対し、$\mathbf{N}_2$ は逆に時計回りに回転させようとする。実際、$\mathbf{N}_1$ ($\odot$)と$\mathbf{N}_2$ ($\otimes$) が反対方向を向いているのは、逆向きの回転力であることを表している（すでに述べたように、力のモーメントのベクトルの向きは回転する向きの情報を表しているのであった）。

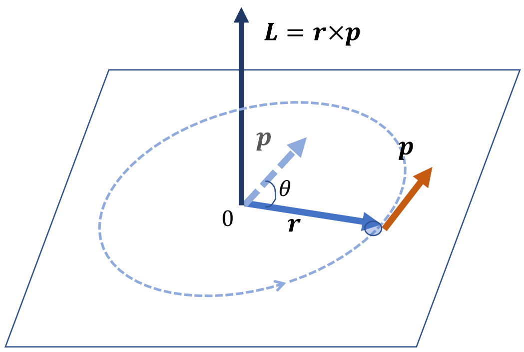
[5] **力のモーメントのベクトルは、一般的に、どの点のまわりについて求めるか（腕のベクトルをどう取るか）によって異なる向きと大きさを持つ。常に、「何々の点のまわりの力のモーメント」、という言い方をしなければならない。**

つりあう条件とは竿が回転しない条件のことを意味するので、つりあっているときは、力のモーメントの総和（回転力の総和）は、$\mathbf{N}_{\mathrm{total}} = \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 = 0$ でなければならない。よって、この条件を式で書けば、$\mathbf{N}_1 = -\mathbf{N}_2$ となる。すでに反対を向いていることはわかっているので、お互いの大きさが等しい $|\mathbf{N}_1| = |\mathbf{N}_2|$、すなわち、式(5-2-5)(5-2-6)より、$(m_1 g)r_1 = (m_2 g)r_2$ という条件が得られる。これは、経験上得た式(5-2-3)と全く同じである。

5.3　角運動量

角運動量(angular momentum) ($\mathbf{L}$)は「回転運動の度合い」を表わす物理量（**ベクトル量**）で、位置ベクトル $\mathbf{r}$ と運動量ベクトル $\mathbf{p}$のベクトル積で定義される。

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} \qquad (5\text{-}3\text{-}1)$$



原点のまわりの $\mathbf{L}$ の向きと大きさは、右図より[6], [7]、

向き　：$\mathbf{r}$と$\mathbf{p}$が作る平面に垂直で、右ネジを$\mathbf{r}$から$\mathbf{p}$の方に回した時にネジが進む方向。

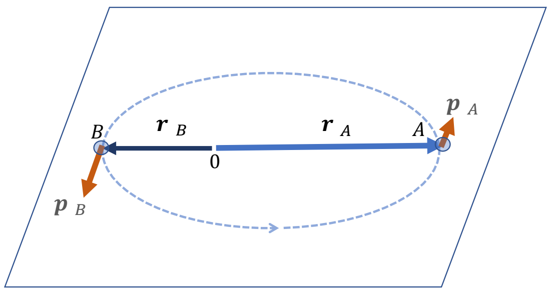
大きさ：$\mathbf{r}$と$\mathbf{p}$が作る平行四辺形の面積。　$|\mathbf{L}| = |\mathbf{r}||\mathbf{p}|\sin\theta$　(5-3-2)

となる。

ここで、$\mathbf{L}$ の向きは、回転の向きの情報を持つ。$\mathbf{L}$が $\mathbf{r}$ と $\mathbf{p}$ が作る平面に垂直上向きの場合は、物体はその平面を反時計回りに回っている。これに対して、$\mathbf{L}$が 下向きの場合は、物体はその平面を時計回りに回っている。逆に、角運動量ベクトルがのみが与えられた時には、それに垂直な面で物体が回転している、とみなしていいだろう。この時、回転の向きは与えられた $\mathbf{L}$ の向きが得られるような $\mathbf{p}$ の向きとなる。

腕の長さ($r = |\mathbf{r}|$) が同じ場合、$\mathbf{p}$ の大きさが大きいほど角運動量の大きさは大きい。しかし、角運動量の大きさは運動量 $\mathbf{p}$ だけでは決まらない。同じ$\mathbf{p}$ を持っていたとしても腕の長さが長いほど角運動量は大きくなる（すなわち、「回転の半径が大きい方が回転の度合いが大きい」、とみなす）。

今、右図のように、物体が原点のまわりを楕円運動（平面運動）しているとする。原点より遠ざかるほど物体は遅くなり、逆に近づくほど速くなるとする。この時、物体がA点にいる時の角運動量 $\mathbf{L}_A$ と B点にいる場合の角運動量 $\mathbf{L}_B$ のどちらが大きいだろうか[8]。物体がA点にいる時は B点にいる場合より原点



6　運動量ベクトルを図のように原点の位置まで平行移動してから計算するとわかりやすい。

7 **角運動量のベクトルは、力のモーメントと同じように、どの点のまわりについて求めるか（位置ベクトルをどう取るか）によって異なる向きと大きさを持つ。常に、「何々の点のまわりの角運動量」、という言い方をしなければならない (演習参照）。**

8 角運動量の向きは図の平面上向きになる。

からの腕の長さは長いが、速度は遅い。一方、B点にいる時は A点にいる場合より速度は速いが、原点からの腕の長さは短い。角運動量の大きさは、腕の長さと運動量の積で決まるので、それほど大きな差はないだろうと考えられる。実は、後の章で示すように、太陽の周りを回る惑星の運動はケプラーの法則より太陽を一つの焦点（図の原点の位置）とするような楕円運動をする。この場合は、角運動量は向き（惑星が運動する平面に垂直）も大きさも時間変化せず一定である（角運動量が保存する）ことを示せる[9]。

5.4　回転の運動方程式

角運動量 $\mathbf{L}$ と力のモーメント $\mathbf{N}$ の間には次のようなシンプルな関係がある。

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N} \qquad \text{(5-4-1)}$$ ＜**重要**＞

これを回転の運動方程式という。式(5-4-1)はNewtonの運動方程式から以下に示すように、容易に導ける。しかし、回転の運動を扱うときは、Newtonの運動方程式に戻らず、式(5-4-1)を出発点とした方が便利である[10]。

（証明）
$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times (m\dot{\mathbf{r}}) = m(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \qquad \text{(5-4-2)}$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} m(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = m[(\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}) + (\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}})]$$
$$= \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{N} \qquad \text{(5-4-3)}$$

なお、ベクトル積の微分の公式(5-1-6)と $\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} = 0$ であること[11]、そして Newtonの運動方程式 $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ を使った。

ここで、直線運動の運動方程式（Newtonの運動方程式）と比べてみよう。

$m\mathbf{a} = m\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \dfrac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \dfrac{d\mathbf{p}}{dt}$ なので、Newtonの運動方程式は、

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \qquad \text{(5-4-4)}$$

と書ける。(5-4-4)式と(5-4-1)式はよく似た形をしていることがわかる。

直線運動の場合、$\mathbf{F} = 0$ の時は、$\mathbf{p} = \text{const.}$ なので物体は「運動量一定の運動」（等速直線運動）する。これは慣性の法則であった。力が働かないとき、物体は速度一定（静止の状態も含む）で運動する。（運動量は直線運動の状態を表す度合いと考えると、それが変化しない）。そして、力は、その状態を変化させる原因であった。すなわち、力が働くと加速度運動（加速、減速）をする。

[9] 万有引力に限らず、中心力では一般的に角運動量保存則が成り立つことを後で示す。

[10] 試験の時でも、式(5-4-1)を導く必要はない。式(5-4-1)から出発してかまわない。

[11] ベクトルの微分はベクトルであることに注意。同じベクトルどうしのベクトル積は０（(5-1-3)式を見よ。）

一方、回転運動の方程式(5-4-1)を見ると、力のモーメントがゼロ ($\mathbf{N}=0$) のときは物体の「角運動量は一定 ($\mathbf{L}=\mathrm{const.}$)」になることがわかる。これは、「回転の慣性」と呼んでも良いだろう。ある回転の度合い（角運動量）を持っている物体は、力のモーメントが働かない限り、その状態を保った回転運動を続ける傾向（回転の慣性）がある。したがって、力のモーメントはその回転状態を変化させる原因、と解釈できる。

さて、力のモーメントがゼロになる場合はどんな時があるであろうか。力のモーメントの定義 $\mathbf{N}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}$ より、次の二つの場合、

(1) $\mathbf{F}=0$ の場合（そもそも、力が働いていない場合は $\mathbf{N}$ もゼロ）

(2) $\mathbf{r}=0$ の場合（物体が回転軸の場所にいる、すなわち腕の長さがゼロなら $\mathbf{N}$ もゼロ）

は明らかであろう。

しかし、もう一つゼロになる場合がある。

(3) 常に $\mathbf{F}//\mathbf{r}$ （平行）の場合

$\mathbf{F}$と$\mathbf{r}$が平行なので極座標の動径方向の単位ベクトルを使って、$\mathbf{F}=F\mathbf{e}_r$ 、$\mathbf{r}=r\mathbf{e}_r$ と書くと、

$$\mathbf{N}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}=r\mathbf{e}_r\times F\mathbf{e}_r=rF(\mathbf{e}_r\times\mathbf{e}_r)=0 \qquad \text{(5-4-5)}$$

となる。[12] これは幾何学的には当然で、物体を回転させようとする成分は腕の方向と垂直な成分のみであるから、垂直成分がゼロであれば、モーメントもゼロになる。

このような性質をもつ力はすでに学んでいる。

3-1-3節、(3-18)式で表されるような「中心力」がそれである。その定義を、あらためて動径方向の単位ベクトルを使って書くと、$\mathbf{r}=r\mathbf{e}_r$ なので、

$$\mathbf{F}=f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}=f(r)\mathbf{e}_r \qquad \text{(5-4-6)}$$

となる。ここで、$f(r)$ は任意の r のみの関数である。式(5-4-5)において、$F=f(r)$ とおけば、$\mathbf{N}=0$ が得られる。

こうして、**重力や電磁気力などの重要な力の場である中心力場ではエネルギーが保存し（保存力の場）、ポテンシャルが定義できるのみならず、角運動量も保存する**ことが導かれた。

この章の最後に角運動量が保存することの幾何学的な意味を述べておく。

角運動量保存　＝　質点は常に $\mathbf{L}$ に垂直な平面内を運動する　　(5-4-7)

ベクトル量である角運動量が保存するとは、**その向きも大きさも時間変化しない**、ということでる。5-3節の角運動量の定義の図を見るとわかるが、$\mathbf{L}$ は $\mathbf{r}$ と$\mathbf{p}$ の作る平面に垂直である。角運動量が保存する場合は$\mathbf{L}$ の大きさは変化しないが、向きも時間変化してはいけない。したがって、質点は常に$\mathbf{L}$に垂直な同じ平面上を回転運動することになる（もし、平面の傾きが時間変化すれば、当然$\mathbf{L}$の向きも変化するので）。よって、(5-4-7)が証明された。

[12] 同じベクトルどうしのベクトル積はゼロであった（(5-1-3)式）

5-3節の最後に、太陽の周りを回る惑星は楕円運動（平面運動）をし、角運動量は向き（惑星が運動する平面に垂直）も大きさも時間変化せず一定である、と述べた。惑星の運動は万有引力場（中心力場）での運動なので、上の議論より、確かに角運動量は保存し平面運動することがわかる。

（例題）質点が等速円運動する場合、常に角運動量 $\mathbf{L}$ が一定で力のモーメント $\mathbf{N}$ がゼロとなることを示しなさい。

(解答例）。

質量mの質点が一定の速さ v_0 で反時計回りに半径 r_0 の円運動をしているとする。円の接線方向を向いた速度ベクトル$\mathbf{v}$は円の中心を原点とした位置ベクトル $\mathbf{r}$ に常に垂直である。よって、角運動量ベクトル $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ の向きは、円運動する平面に常に垂直で$\mathbf{r}$から$\mathbf{p}$に右ネジを回した時に進む方向（z方向とする）であり、その大きさは $|\mathbf{L}| = r_0(mv_0) = mr_0^2\dot{\varphi}$ である。最後のところは、式(4-2-11)より偏角方向の速度成分が $v_\varphi = v_0 = r_0\dot{\varphi}$ であることを使った（ $\dot{\varphi}$ は「角速度」と呼ばれる量である。$\dot{\varphi} = \omega$ と書いて$v_\varphi = r_0\omega$ 、$|\mathbf{L}| = mr_0^2\omega$ としても良い）。 等速円運動では r_0 もv_0 (あるいは $\dot{\varphi}$)も一定なので、 $|\mathbf{L}|$ も一定となる。こうして、$\mathbf{L}$の向きも大きさも時間変化しないので、角運動量が保存する事がわかる。回転の運動方程式(5-4-1)において、$\dot{\mathbf{L}} = 0$ であるから、力のモーメント $\mathbf{N}$ はゼロとなる。

(別解1)上の解法と同じことであるが、

$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times (m\dot{\mathbf{r}}) = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = m(r_0\mathbf{e}_r \times v_0\mathbf{e}_\varphi) = mr_0v_0(\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi) = mr_0v_0\mathbf{e}_z$ となるので、$\dot{\mathbf{L}} = 0.$ ここで、$r_0 = v_0 =$ 一定、および $\dot{\mathbf{e}}_z = 0$ （直交座標の単位ベクトルは時間変化しない）であることを使った。したがって、式(5-4-1)より力のモーメント$\mathbf{N}$はゼロである。

(別解2) 等速円運動において、$r = r_0$ も $\dot{\varphi} = v_0/r_0$ も一定なので $\dot{r} = 0, \ddot{r} = 0, \ddot{\varphi} = 0$ となる。この時、 式(4-2-13)から加速度ベクトルは $\mathbf{a} = -r\dot{\varphi}^2\mathbf{e}_r$ となり、常に原点方向を向いていることがわかる。したがって、等速円運動の時、力 $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -mr\dot{\varphi}^2\mathbf{e}_r$ は常に原点方向を向いている（向心力）。これは中心力なので、前ページの力のモーメント$\mathbf{N}$がゼロになる条件（３）を満たしている。また、$\mathbf{N} = 0$ なので、(5-4-1)式より $\mathbf{L}$ が一定である事もわかる。

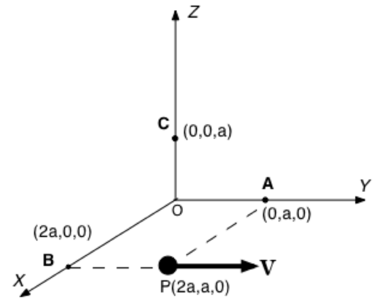
演習8

1.　ベクトル積の微分に関する式(5-1-6)を証明せよ。

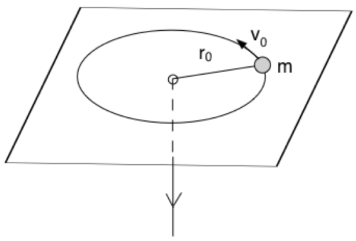
$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \dot{\mathbf{A}}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\dot{\mathbf{B}} \qquad (5\text{-}1\text{-}6)$$

(Hint)　左辺のx成分は $\left[\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\right]_x = \frac{d}{dt}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_x$ を計算すれば良い。これが右辺のx成分になることを示す。他の成分も同様。

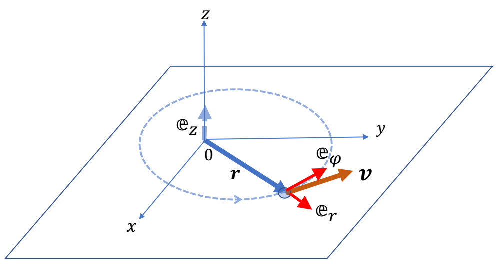
2.．角運動量は $\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ で定義されるので、<u>位置ベクトル $\mathbf{r}$ の基準点を変えると $\mathbf{L}$ の値も変わる</u>。これを、その基準点のまわりの角運動量、という言い方をする場合がある。いま、ある時刻において、質量 m の質点が右図のように xy 平面上の点$P(2a,a,0)$にあり、y軸と平行に速度 $\mathbf{v}$ で走っていたとする。基準点として、原点O, A点(0, a, 0), B点(2a, 0, 0), C点(0, 0, a)を選んだ時、それらの点のまわりの角運動量$\mathbf{L}_0$, $\mathbf{L}_A$, $\mathbf{L}_B$, $\mathbf{L}_C$をそれぞれ求めよ（それぞれの向きと大きさを求める）。



3.　右図のように、糸の一端に質量 m の質点をつけて滑らかな水平面上におき、他端を穴に通して引きながら質点を穴のまわりに回転させる。今、糸の長さが r_0 の時、角速度が ω_0 であった。長さが r_1 （$r_1 < r_0$）になった時の角速度 ω_1 を求めよ。



4.　中心力場では角運動量 $\mathbf{L}$ が保存するので質点は平面運動する（(5-4-7)式参照）。その平面に右図のような「2次元」の極座標を設定する。この時、位置ベクトル $\mathbf{r}$ の位置にある質点 (質量 m) の速度は (4-2-9)式 $\mathbf{v}=\dot{r}\mathbf{e}_r+(r\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi$ と書ける。このとき、$\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ を計算し$\mathbf{L}=(mr^2\dot{\varphi})\mathbf{e}_z$ となることを示せ。ただし、$\mathbf{e}_z$ は右図のように平面に垂直な方向（ z 方向）の単位ベクトルである。



5.　右図のように、質量の無視できる長さ l（$l=|\mathbf{r}|$）の糸の先端に質量 m の質点がつけられた単振子がある。重力加速度をgとして、この振り子の運動方程式を、回転の運動方程式(5-4-1) $\frac{d\mathbf{L}}{dt}=\mathbf{N}$ から出発して求めよう。なお、糸はゆるむ事はなく、また、摩擦や空気の抵抗なども無視できるとする。（これは、<u>演習(7)の問題2-(1)で偏角方向の運動方程式を求めることに相当</u>する）

(1) 右図のように、質点が反時計回りに上昇して、鉛直方向と角度 θ になっている状態での「0点のまわりの角運動量 」$\mathbf{L}$ と「0点のまわりの力のモーメント」 $\mathbf{N}$ の向きと大きさをそれぞれ求めよ。ただし、図の中で$\mathbf{T}$ は張力である。

(2) $\frac{d\mathbf{L}}{dt}=\mathbf{N}$から、振り子の運動方程式 $\ddot{\theta}=-\frac{g}{l}\sin\theta$ を求めよ。